

PROBABILITAS BERSYARAT, INDEPENDENSI DAN TEOREMA BAYES DALAM MENENTUKAN PELUANG TERJADINYA SUATU PERISTIWA

Lian G. Otaya

Institut Agama Islam Negeri Sultan Amai Gorontalo

Abstrak

Probabilitas hanyalah suatu sistematika ilmu untuk mempelajari ketidakpastian. Seakurat-akuratnya model probabilitas yang digunakan, tetap saja ketidakpastiaan itu masih ada walau dengan kadar yang rendah. Ketidakpastiaan yang rendah itu pada gilirannya dapat menghasilkan hasil yang ekstrim. Jadi penting memahami apa yang bisa diberikan oleh teori probabilitas dan turunannya, termasuk dalam memahami teori probabilitas bersyarat dan independensi dalam suatu peristiwa. Masalah yang sering muncul dalam kehidupan sehari-hari adalah menentukan peluang akan terjadinya suatu kejadian, bila kejadian lain telah terjadi. Peluang seperti ini disebut probabilitas bersyarat. Dua peristiwa dikatakan bersyarat adalah jika terjadinya peristiwa yang satu akan mempengaruhi atau merupakan syarat terjadinya peristiwa yang lain. Jika peristiwa X dan Y merupakan peristiwa dependen (probabilitas bahwa Y akan terjadi jika diketahui bahwa X telah terjadi) $P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y/X)$. Sementara dua peristiwa dikatakan independen (bebas) jika terjadinya atau tidak terjadinya peristiwa satu tidak mempengaruhi atau tidak dipengaruhi oleh peristiwa yang lain. Jika X dan Y merupakan dua peristiwa yang independen, maka probabilitas untuk terjadinya kedua peristiwa tersebut adalah : $P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y)$.

A. Pendahuluan

Kehidupan sehari-hari sulit untuk mengetahui dengan “pasti” apa yang akan terjadi pada waktu yang akan datang, baik dalam jangka pendek maupun jangka panjang. Oleh karena itu, manusia sering menghadapi suatu yang sering disebut sebagai “ketidakpastian”.

Ketidakpastian terjadi akibat keterbatasan manusia itu sendiri di dalam dunianya dalam mengukur menghitung, menalar, meramal suatu hal baik yang akan datang maupun yang ada di depan mata, termasuk yang telah terjadi. Sudah sejak awal zaman, ketidakpastian diantisipasi manusia dengan berbagai cara. Ada cara yang bersifat *prophecy* dan *supranatural*, ada pula yang lebih rasional dengan mempelajari periodisitas (pengulangan) gejala alam untuk mengurangi tingkat ketidakpastian itu mungkin menjadi faktor pemicu dinamika roda kehidupan itu sendiri. Dengan kata lain, walau ketidakpastian itu seringkali menjadi sumber kesulitan, tetapi juga sekaligus merupakan *blessing*.

Teori probabilitas dapat dikatakan merupakan salah satu ilmu untuk “mengukur” ketidakpastian hingga ke tingkat yang lebih

manageable dan *predictable*. Teori probabilitas digunakan bukan hanya untuk hal-hal yang praktis, bahkan juga untuk hal-hal yang teoritis ketika model-model matematis tidak dapat lagi disusun secara komprehensif untuk memecahkan suatu masalah. Apalagi dunia pendidikan yang pada umumnya memerlukan pertimbangan yang lebih singkat dan pragmatis sangat mengandalkan konsep-konsep teori probabilitas.

Statistika adalah “wajah” dari teori probabilitas. Statistika digunakan untuk melakukan pengukuran kuantitatif yang aproksimatif akan suatu hal. Konsep metodologis yang digunakan didalam statistika dikembangkan berdasarkan teori probabilitas. Dalam penggunaannya, hasil pengukuran statistika sudah dapat dianggap memadai. Namun, untuk memahami apa yang ada di balik angka-angka hasil penghitungan statistika tersebut memerlukan pemahaman mengenai model probabilitas yang digunakannya, yang artinya perlu kembali ke teori probabilitas. Tanpa pemahaman tersebut, seringkali statistika digunakan untuk elegitimasi suatu kebohongan (dikenal sebagai kebohongan statistika) ketika statistika digunakan sementara model dasar probabilitas yang terkait tidak sesuai/relevan dengan situasi yang sebenarnya.

B. Konsep Probabilitas

Probabilitas adalah salah satu alat yang amat penting karena probabilitas banyak digunakan untuk menaksir derajat ketidakpastian dan oleh karenanya mengurangi resiko. Probabilitas ialah suatu nilai yang digunakan untuk mengukur tingkat terjadi suatu kejadian yang acak.

Kata probabilitas sering disebut peluang dan kemungkinan. Secara umum Probabilitas merupakan peluang bahwa sesuatu terjadi. Secara lengkap didefinisikan sebagai berikut: "Probabilitas" ialah suatu nilai yang digunakan untuk mengukur tingkat terjadinya suatu kejadian yang acak. Agus Irianto (2009 : 73) mengemukakan teori probabilitas berkembang dari permainan gamblang, dimana setiap tebakan mengandung unsur kemungkinan keluar maupun tidak persoalannya terletak pada pilihan itu mengandung kemungkinan keluar lebih besar daripada kemungkinan tidak keluar atau tidak.

Contoh 1. Mata uang koin Rp. 100.- mempunyai dua sisi. Sisi pertama bergambar rumah Minangkabau (RM), dan sisi lain bergambar gunung wayah (GW). Jika koin tersebut kita lemparkan ke atas sekali maka ada kemungkinan keluar RM dan ada pula kemungkinan keluar (GW). Kemungkinan keluar RM = Kemungkinan keluar GW. Setiap sisi mempunyai probabilitas keluar $\frac{1}{2}$. Jumlah probabilitas RM adalah 1. Hal ini merupakan hukum dalam probabilitas dari masing-masing elemen pasti.

Ramachandran, K.M & Chris P. Tsokos (2009 : 54) mengemukakan bahwa: *Probability theory provides a mathematical model for the study of randomness and uncertainty. The concept of probability occupies an important role in the decision-making process, whether the problem is one faced in business, in engineering, in government, in sciences, or just in one's own everyday life. Most decisions are made in the face of uncertainty. The mathematical models of probability theory enable us to make*

predictions about certain mass phenomena from the necessarily incomplete information derived from sampling techniques. It is the probability theory that enables one to proceed from descriptive statistics to inferential statistics. In fact, probability theory is the most important tool in statistical inference.

Pendapat di atas, menjelaskan bahwa teori probabilitas merupakan model matematika untuk studi keacakan dan ketidakpastian. Konsep probabilitas menempati peran penting dalam proses pengambilan keputusan, apakah masalah yang dihadapi dalam bisnis, teknik, dalam pemerintahan, dalam ilmu, atau hanya dalam masalah yang dihadapi dalam kehidupan sehari-hari. Sebagian besar keputusan yang dibuat dalam menghadapi ketidakpastian. Model matematika dalam teori probabilitas memungkinkan kita untuk membuat prediksi tentang fenomena massal tertentu dari informasi yang tidak lengkap yang berasal dari teknik sampling. Ini adalah teori probabilitas yang memungkinkan untuk melanjutkan dari statistik deskriptif ke statistik inferensial. Bahkan, teori probabilitas adalah sebagai alat yang paling penting dalam statistik inferensial.

Asal usul teori probabilitas dapat ditelusuri ke pemodelan permainan peluang seperti berurusan dari setumpuk kartu, atau roda roulette berputar. Hasil awal dari probabilitas muncul dari kolaborasi yang hebat matematika terkemuka Blaise Pascal dan Pierre Fermant dan penjudi, Chevalier de Mere. Mereka tertarik pada apa yang tampaknya menjadi kontradiksi antara matematika perhitungan dan permainan sebenarnya kesempatan, seperti melempar dadu, melempar koin, atau roda roulette berputar. Misalnya, melempar sebuah dadu, ia mengamati bahwa setiap nomor, 1 sampai 6, muncul dengan frekuensi sekitar $\frac{1}{6}$. Namun, jika dua dadu digulung, jumlah angka menunjukkan pada dua dadu, yaitu, 2 sampai 12, tidak muncul sama sering. Hal itu kemudian diakui bahwa, karena jumlah melempar meningkat, frekuensi hasil ini mungkin bisa diprediksi dengan mengikuti beberapa aturan sederhana. Percobaan dasar yang sama dilakukan dengan menggunakan permainan kesempatan lain, yang mengakibatkan pembentukan berbagai aturan

dasar probabilitas. Teori probabilitas dikembangkan semata-mata untuk diterapkan pada permainan kesempatan sampai abad ke-18, ketika Pierre Laplace dan Karl F. Gauss diterapkan aturan probabilistik dasar untuk masalah fisik lainnya. Teori probabilitas modern dikembangkan pada tahun 1933 Yayasan publikasi Teori Probabilitas oleh Rusia ahli matematika Andrei N. Kolmogorov. Dia mengembangkan teori probabilitas dari titik pandang aksiomatik (Ramachandran, K.M & Chris P. Tsokos, 2009 : 54).

Menurut David Hume apabila mempergunakan argumen yang disusun atas dasar pengalaman kita dimasa lampau sebagai dasar pertimbangan untuk membuat ramalan dimasa mendatang maka argument ini hanya merupakan kemungkinan (Probabilitas). Jadi probabilitas merupakan pernyataan yang berisi ramalan tentang tingkatan keyakinan tentang terjadinya sesuatu dimasa yang akan datang.

Tingkatan keyakinan ini bisa dinyatakan dengan angka atau tanpa dengan angka. Seperti contoh untuk mengukur kemungkinan keluarnya sisi mata uang ketika diputar, karena sisi mata uang ada dua maka kemungkinan keluarnya sebuah sisi mata uang bias ditulis dengan angka yaitu $\frac{1}{2}$, yang artinya terdapat 1 kemungkinan dari 2 kemungkinan.

Peluang atau kebolehjadian atau dikenal juga sebagai probabilitas adalah cara untuk mengungkapkan pengetahuan atau kepercayaan bahwa suatu kejadian akan berlaku atau telah terjadi. Probabilitas suatu kejadian adalah angka yang menunjukkan kemungkinan terjadinya suatu kejadian. Nilainya diantara 0 dan 1. Kejadian yang mempunyai nilai probabilitas 1 adalah kejadian yang pasti terjadi atau sesuatu yang telah terjadi. Misalnya matahari yang masih terbit di timur sampai sekarang. Sedangkan suatu kejadian yang mempunyai nilai probabilitas 0 adalah kejadian yang mustahil atau tidak mungkin terjadi. Misalnya seekor kambing melahirkan seekor sapi.

Probabilitas/Peluang suatu kejadian A terjadi dilambangkan dengan notasi $P(A)$, $p(A)$, atau $Pr(A)$. Sebaliknya, probabilitas [bukan A] atau *komplemen* A , atau probabilitas suatu kejadian A tidak akan terjadi, adalah $1-P(A)$.

Berpengaruh atau tidaknya suatu probabilitas atau kejadian terhadap kejadian yang lain, kejadian-kejadian dibedakan menjadi dua, yaitu sebagai berikut.

- a. Probabilitas Dependen (Tidak bebas atau tergantung) dua kejadian disebut dependen apabila terjadi atau tidaknya suatu kejadian “berpengaruh” pada probabilitas kejadian yang lain. Apabila dua kejadian dependen, konsep “probabilitas bersyarat” digunakan untuk menentukan probabilitas dari kejadian yang berkaitan. Lambang dari probabilitas bersyarat adalah $P(A|B)$ yang menyatakan bahwa: “Probabilitas kejadian A , dengan ketentuan kejadian B terlebih dahulu terjadi”.

Probabilitas independen (Bebas atau tidak tergantung) dua kejadian disebut independen apabila terjadi atau tidaknya suatu kejadian “tidak berpengaruh” pada probabilitas kejadian yang lain.

C. Konsep Probabilitas Bersyarat dan Independensi

Sehubungan dengan konsep probabilitas bersyarat, Feller (1968) dalam Carmen Díaz & Carmen Batanero (2009: 21) menyarankan bahwa: “Gagasan probabilitas bersyarat adalah alat dasar teori probabilitas”. Definisi umum dari probabilitas bersyarat adalah sebagai berikut: $P(B) > 0$ misalkan sebuah peristiwa B , dalam ruang sampel. Dalam hal ini, untuk setiap peristiwa A dalam ruang sampel yang sama, probabilitas bersyarat dari A mengingat bahwa B terjadi. Teori-teori filsafat telah menjelaskan sebab-akibat. Salah satu ketentuan umum diterima (meskipun bukan satu-satunya ketentuan) adalah bahwa jika suatu peristiwa A adalah penyebab lain peristiwa B , setiap kali A terjadi, B juga terjadi, dan oleh karena itu menyatakan bahwa $P(B|A)=1$. Sebaliknya $P(B|A)=1$, jika maka tidak benar bahwa A adalah penyebab B meskipun keberadaan bersyarat hubungan menunjukkan bahwa hubungan kausal mungkin. Dalam beberapa kasus hubungan kondisional tidak berarti sebab-akibat.

Pengertian di atas menjelaskan hubungan kedua peristiwa A dan peristiwa B yang terdapat antara peristiwa adalah hubungan bersyarat. Dua peristiwa dikatakan mempunyai hubungan bersyarat jika peristiwa yang satu menjadi syarat terjadinya peristiwa yang lain. Peristiwa tersebut ditulis dengan $A|B$ untuk menyatakan peristiwa A terjadi dengan didahului terjadinya peristiwa B . Peluangnya ditulis $P(A|B)$ yang disebut peluang bersyarat.

Jika terjadinya atau tidak terjadinya peristiwa B tidak mempengaruhi terjadinya peristiwa A, maka A dan B disebut peristiwa-peristiwa bebas atau independent. Untuk menyatakan kedua peristiwa terjadi maka ditulis A dan B atau $P(A \text{ dan } B) = P(A) \cdot P(B)$

Ronald E. Walpole et.al (2007: 58) "*The probability of an event B occurring when it is known that some event A has occurred is called a conditional probability and is denoted by $P(B|A)$. The symbol $P(B|A)$ is usually read "the probability that B occurs given that A occurs" or simply "the probability of B, given A."* (probabilitas suatu peristiwa B terjadi jika diketahui bahwa beberapa peristiwa A telah terjadi disebut probabilitas bersyarat dan dilambangkan dengan $P(B|A)$. Simbol $P(B|A)$ biasanya dibaca "probabilitas bahwa B terjadi mengingat bahwa A terjadi" atau hanya "probabilitas B, diberikan A").

Probabilitas bersyarat terjadi jika peristiwa yang satu mempengaruhi/merupakan syarat terjadinya peristiwa yang lain. Probabilitas bahwa B akan terjadi bila diketahui bahwa A telah terjadi ditulis sebagai berikut.

$P(B|A)$

Dengan demikian probabilitas bahwa A dan B akan terjadi dirumuskan sebagai berikut.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

Sedang probabilitas A akan terjadi jika diketahui bahwa B telah terjadi ditulis sebagai berikut.

$P(A|B)$

Maka probabilitas B dan A akan terjadi dirumuskan sbb :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

Contoh :

Dua buah tas berisi sejumlah bola. Tas pertama berisi 4 bola putih dan 2 bola hitam. Tas kedua berisi 3 bola putih dan 5 bola hitam. Jika sebuah bola diambil dari masing-masing tas tersebut, hitunglah probabilitasnya bahwa :

- Keduanya bola putih
- Keduanya bola hitam
- Satu bola putih dan satu bola hitam

Jawab

Misalnya A_1 menunjukkan peristiwa terambilnya bola putih dari tas pertama dan A_2 menunjukkan peristiwa terambilnya bola putih di tas kedua, maka :

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) = 4/6 \times 3/8 = 1/4$$

Misalnya A_1 menunjukkan peristiwa tidak terambilnya bola putih dari tas pertama (berarti terambilnya bola hitam) dan A_2 menunjukkan peristiwa tidak terambilnya bola putih dari tas kedua (berarti terambilnya bola hitam) maka:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) = 2/6 \times 5/8 = 10/48 = 5/24$$

Probabilitas yang dimaksud adalah :

$$P(A_1 \cap B_2) \cup P(B_1 \cap A_2)$$

Menurut Carmen Díaz & Inmaculada de la Fuente (2007: 130) pada probabilitas bersyarat diketahui bahwa jika suatu peristiwa B adalah penyebab dari peristiwa lain A, maka setiap kali B hadir adalah A juga hadir dan karena $P(A|B) = 1$. Sebaliknya, $P(A|B) = 1$ tidak berarti bahwa B adalah penyebab A, meskipun adanya hubungan bersyarat tersebut menunjukkan kemungkinan hubungan sebab-akibat. Dari sudut pandang psikologis, orang yang menilai bersyarat probabilitas $P(A|B)$ mungkin menganggap berbagai jenis hubungan antara A dan B tergantung pada konteks. Jika B dianggap sebagai penyebab A, $P(A|B)$ dipandang sebagai hubungan kausal, dan jika A dianggap sebagai kemungkinan penyebab B, $P(A|B)$ dipandang sebagai hubungan diagnostik. Pada bagian tertentu dua probabilitas $P(A|B)$ dan $P(B|A)$ ini menimbulkan kebingungan, sehingga kebingungan itu disebut kesalahan dan dialihkan menjadi bersyarat. Hasil yang sama yang ditemukan oleh Gras dan Totohasina (1995) yang mengidentifikasi dua kesalahpahaman yang berbeda tentang probabilitas bersyarat dalam survei dari siswa sekolah menengah tujuh puluh lima sampai 18 tahun:

- Kronologis kejadian konsepsi di mana siswa menafsirkan probabilitas bersyarat $P(A|B)$ sebagai hubungan temporal; yaitu, peristiwa B harus selalu mendahului peristiwa A.
- Hubungan konsepsi dimana siswa menafsirkan bersyarat probabilitas $P(A|B)$ sebagai hubungan kausal implisit; yaitu, pendingin acara B adalah penyebabnya dan A adalah konsekuensi.

Dari sudut pandang psikologis, orang yang menilai probabilitas bersyarat $P=(A|B)$ mungkin menganggap berbagai jenis hubungan antara A dan B tergantung pada konteksnya (Tversky & Kahneman 1982a).

1. Jika B dianggap sebagai penyebab A, dipandang $P=(A|B)$ sebagai hubungan kausal, dan $(B|A)$ sebagai hubungan diagnostik.
2. Jika A dianggap sebagai kemungkinan penyebab B, dipandang $P=(A|B)$ sebagai hubungan diagnostik.

Hubungan ini berbeda menyangkut penilaian probabilitas bersyarat. Dampak dari data kausal pada penilaian probabilitas konsekuensi biasanya lebih besar dari dampak data diagnostik pada penghakiman kemungkinan penyebab. Untuk alasan ini, orang cenderung melebih-lebihkan kausal dirasakan probabilitas bersyarat sementara mereka mengabaikan diagnostik bersyarat probabilitas. Selain itu, beberapa orang bingung diagnostik dan kausal probabilitas; ini adalah sebuah

kasus tertentu membingungkan dua arah pengkondisian, dan disebut sebagai kesalahan dari bersyarat dialihkan.

Sifat-sifat probabilitas bersyarat:

- a. Bila A_1 dan A_2 dua kejadian yang saling asing maka $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$.
- b. Bila A_0 menyatakan kejadian bukan A maka $P(A|B) = 1 - P(A_0|B)$.
- c. Bila A_1 dan A_2 dua kejadian sebarang maka $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$.
- d. Untuk dua kejadian A dan B berlaku $P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$.

Robert B. Ash (2008: 33) mengemukakan sekelompok orang dipilih secara acak dan tinggi badannya dicatat. Jika A adalah tingginya lebih dari 6 kaki, dan B adalah peristiwa yang digit adalah > 7 , maka intuitif, A dan B yang "independen" dalam arti bahwa pengetahuan tentang terjadinya atau tidak terjadinya salah satu peristiwa seharusnya tidak mempengaruhi kejadian tentang peristiwa yang lain. Contohnya sebuah uang logam misalnya salah satu sisinya disimbolkan dengan sisi A, dan sisi yang lain adalah sisi B, lalu dilempar 2 kali secara acak. Kejadian sisi A maupun kejadian sisi B pada lemparan

pertama TIDAK akan mempengaruhi hasil lemparan kedua, baik di bagian atas sisi A atau sisi B. Kejadian-kejadian ini disebut independen karena tidak saling tergantung.

Dua kejadian atau lebih dikatakan merupakan kejadian bebas apabila terjadinya kejadian tersebut tidak saling mempengaruhi. Dua kejadian A dan B dikatakan bebas, kalau kejadian A tidak mempengaruhi B atau sebaliknya. Jika A dan B merupakan kejadian bebas, maka $P(A/B) = P(A)$ dan $P(B/A) = P(B)$
 $P(A \cap B) = P(A) P(B) = P(B) P(A) \cap P(A)$

Contoh :

Satu mata uang logam Rp. 50 dilemparkan ke atas sebanyak dua kali. Jika A_1 adalah lemparan pertama yang mendapat gambar burung(B), dan A_2 adalah lemparan kedua yang mendapatkan gambar burung(B), berapakah $P(A_1 A_2)$!

Penyelesaian : Karena pada pelemparan pertama hasilnya tidak mempengaruhi pelemparan kedua dan $P(A_1) = P(B) = 0,5$ dan $P(A_2) = P(B) = 0,5$, maka $P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2) = P(B) P(B) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$.

D. Pembahasan

Probabilitas terjadinya suatu kejadian B bila diketahui bahwa kejadian A telah terjadi disebut probabilitas bersyarat dan dinyatakan dengan $P(B|A)$. Lambang $P(B|A)$ biasanya dibaca "*peluang B terjadi bila diketahui A terjadi*" atau lebih sederhana lagi "*peluang B, bila A diketahui*".

Definisi 1 :

Peluang bersyarat B bila A diketahui, dinyatakan dengan $P(B|A)$, ditentukan oleh :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ jika } P(A) > 0$$

CONTOH :

1. Probabilitas suatu penerbangan yang telah terjadual teratur berangkat tepat waktu $P(B) = 0,83$; probabilitas sampai tepat waktu $P(S) = 0,82$; dan probabilitas berangkat dan sampai tepat waktu $P(B \cap S) = 0,78$. Carilah probabilitas bahwa pesawat:

- sampai tepat waktu apabila diketahui berangkat tepat waktu,
- berangkat tepat waktu jika diketahui sampai tepat waktu.

Jawab :

- Probabilitas pesawat sampai tepat waktu jika diketahui berangkat tepat waktu adalah :

$$P(S | B) = \frac{P(B \cap S)}{P(B)} = \frac{0,78}{0,83} = 0,94.$$

- Probabilitas pesawat berangkat tepat waktu apabila diketahui sampai tepat waktu adalah :

$$P(B | S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{0,78}{0,82} = 0,95.$$

Definisi 2 :

Dua kejadian A dan B bebas jika dan hanya jika :

$$P(B|A) = P(B)$$

dan

$$P(A|B) = P(A).$$

Jika tidak demikian, maka A dan B tak bebas.

CONTOH:

Misalkan diberikan suatu percobaan yang berkaitan dengan pengambilan 2 kartu yang diambil berturut-turut dari sekotak kartu dengan pengembalian. Kejadian ditentukan sebagai :

A = kartu pertama yang terambil as,

B = kartu kedua sebuah skop (*spade*).

Karena kartu pertama dikembalikan, ruang sampel untuk kedua pengambilan terdiri dari 52 kartu, berisi 4 as dan 13 skop. Jadi

$$P(B | A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4},$$

dan

$$P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

Jadi, $P(B|A) = P(B)$. Apabila hal ini benar, maka kejadian A dan B dikatakan bebas (*independent*).

Definisi 3 :

Bila dalam suatu percobaan A dan B dapat terjadi sekaligus, maka :

$$P(A \cap B) = P(A) P(B | A)$$

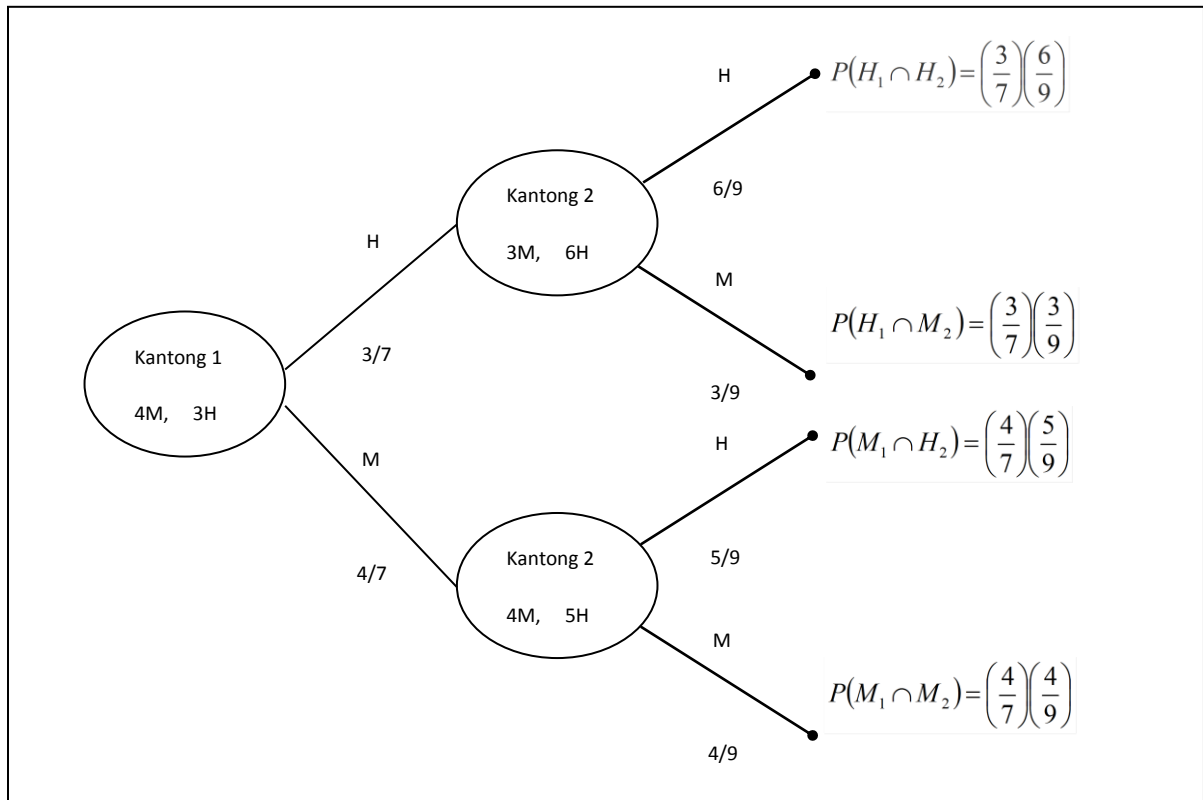
$$P(A \cap B) = P(B) P(A | B)$$

CONTOH:

Suatu kantong berisi 4 bola merah dan 3 bola hitam, dan kantong kedua berisi 3 bola merah dan 5 bola hitam. Satu bola diambil dari kantong pertama dan dimasukkan tanpa melihatnya ke kantong kedua. Berapakah probabilitas apabila sekarang diambil bola hitam dari kantong kedua ?

Jawab :

Misalkan H_1 , H_2 , dan M_1 masing-masing menyatakan mengambil 1 bola hitam dari kantong 1, 1 bola hitam dari kantong 2, dan 1 bola merah dari kantong 1. Ingin diketahui gabungan dari kejadian mutually exclusive $H_1 \cap H_2$ dan $M_1 \cap H_2$. Berbagai kemungkinan dan probabilitasnya diperlihatkan pada Gambar di bawah ini.



Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
 P[(H_1 \cap H_2) \text{ atau } (M_1 \cap H_2)] &= P(H_1 \cap H_2) + P(M_1 \cap H_2) \\
 &= P(H_1)P(H_2 | H_1) + P(M_1)P(H_2 | M_1) \\
 &= \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{6}{9}\right) + \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{9}\right) \\
 &= \frac{38}{63}.
 \end{aligned}$$

Definisi 4 :

Bila 2 kejadian A dan B bebas, maka :

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

CONTOH :

Suatu kota kecil mempunyai sebuah mobil pemadam kebakaran dan sebuah ambulans untuk keadaan darurat. Probabilitas mobil pemadam kebakaran siap setiap waktu diperlukan adalah 0,98; probabilitas mobil ambulans siap setiap waktu dipanggil adalah 0,92. Jika dalam kejadian ada kecelakaan karena kebakaran gedung, maka carilah probabilitas keduanya siap.

Jawab :

Misalkan A dan B masing-masing menyatakan Kejadian mobil pemadam kebakaran dan ambulans siap. Oleh karena itu,

$$P(A \cap B) = P(A) P(B) = (0,98)(0,92) = 0,9016.$$

Definisi 5 :

Bila dalam suatu percobaan kejadian-kejadian A_1, A_2, \dots, A_k dapat terjadi, maka :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1})$$

CONTOH:

Tiga kartu diambil satu persatu tanpa pengembalian dari sekotak kartu (yang berisi 52 kartu). Carilah probabilitas bahwa kejadian $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ terjadi, apabila A_1 kejadian bahwa kartu pertama as berwarna merah, A_2 kejadian bahwa kartu kedua 10 atau jack, dan A_3 kejadian bahwa kartu ketiga lebih besar dari 3 tetapi lebih kecil dari 7.

Jawab :

Diketahui bahwa :

A_1 : kartu pertama as berwarna merah,

A_2 : kartu kedua 10 atau jack,

A_3 : kartu ketiga lebih besar dari 3 tetapi lebih kecil dari 7.

Selanjutnya,

$$P(A_1) = \frac{2}{52}$$

$$P(A_2 | A_1) = \frac{8}{51}$$

$$P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{12}{50}$$

sehingga diperoleh bahwa :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \left(\frac{2}{52}\right)\left(\frac{8}{51}\right)\left(\frac{12}{50}\right) = \frac{8}{5525}$$

Definisi 5 :

Bila A_1, A_2, \dots, A_k saling bebas, maka :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \dots P(A_k)$$

Teorema :

Bila kejadian B_1, B_2, \dots, B_k merupakan partisi dari ruang sampel S dengan $P(B_i) \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, k$, maka untuk setiap kejadian A anggota S :

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A | B_i)$$

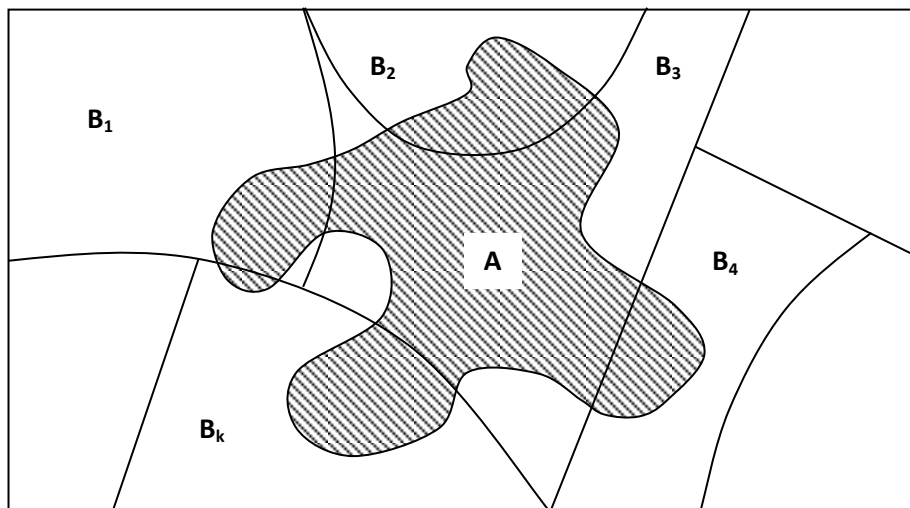
atau

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) + \dots + P(B_k)P(A | B_k)$$

BUKTI :

Perhatikan diagram Venn pada Gambar di bawah ini. Terlihat bahwa kejadian A merupakan gabungan dari sejumlah kejadian yang *mutually exclusive* $B_1 \cap A, B_2 \cap A, \dots, B_k \cap A$, yaitu :

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \dots \cup (B_k \cap A)$$



Dengan menggunakan pernyataan yang mengatakan bahwa :

Apabila \$E_1, E_2, \dots, E_k\$ kejadian yang disjoint, maka $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) = P(E_1) +$

$P(E_2) + \dots + P(E_k)$.

serta

Apabila kejadian \$E_1\$ dan \$E_2\$ dapat terjadi pada suatu percobaan, maka $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2 | E_1)$.

Sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \\
 &\cup \dots (B_k \cap A)] \\
 &= P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) \\
 &+ \dots + P(B_k \cap A) \\
 &= \\
 \sum_{i=1}^k P(B_i \cap A) &= \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A | B_i).
 \end{aligned}$$

CONTOH :

Tiga anggota koperasi dicalonkan menjadi ketua. Probabilitas Pak Ali terpilih adalah 0,3; probabilitas Pak Badu terpilih adalah 0,5; sedangkan probabilitas Pak Cokro adalah 0,2. Apabila Pak Ali terpilih, maka probabilitas

kenaikan iuran koperasi adalah 0,8. Apabila Pak Badu atau Pak Cokro yang terpilih, maka probabilitas kenaikan iuran adalah masing-masing 0,1 dan 0,4. Berapakah probabilitas iuran akan naik ?

Jawab :

Perhatikan kejadian sebagai berikut.

\$A\$ = Orang yang terpilih menaikkan iuran

\$B_1\$ = Pak Ali yang terpilih

\$B_2\$ = Pak Badu yang terpilih

\$B_3\$ = Pak Cokro yang terpilih.

Berdasarkan teorema jumlah probabilitas, maka diperoleh :

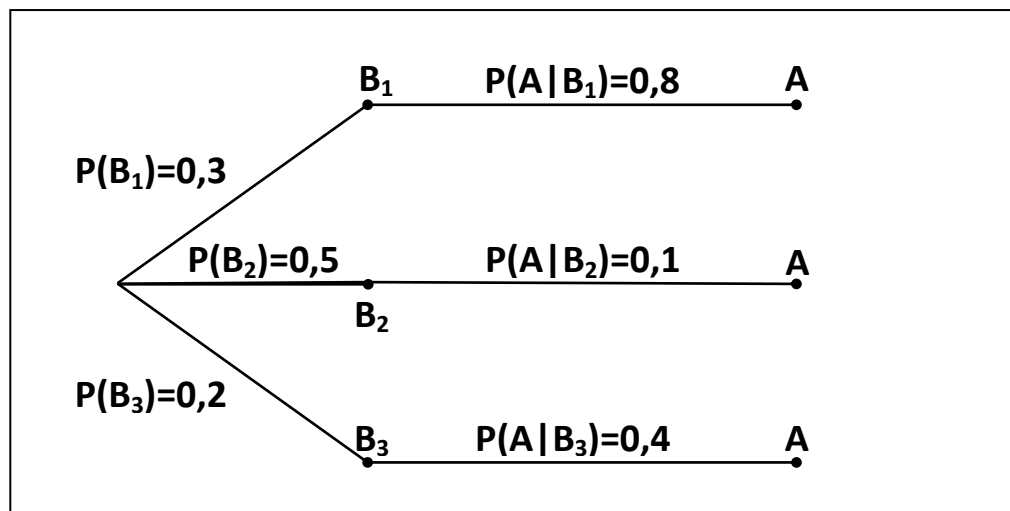
$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

Dengan melihat diagram pohon pada Gambar di bawah ini, terlihat bahwa ketiga cabang mempunyai probabilitas

$$P(B_1)P(A|B_1) = (0,3)(0,8) = 0,24$$

$$P(B_2)P(A|B_2) = (0,5)(0,1) = 0,05$$

$$P(B_3)P(A|B_3) = (0,2)(0,4) = 0,08.$$



Jadi $P(A) = 0,24 + 0,05 + 0,08 = 0,37$.

KAIDAH TEOREMA BAYES

Misalkan kejadian B_1, B_2, \dots, B_k merupakan suatu partisi dari ruang sampel S dengan $P(B_i) \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, k$. Misalkan A suatu kejadian sebarang dalam S dengan $P(A) \neq 0$, maka :

$$P(B_r | A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A | B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A | B_i)}$$

untuk $r = 1, 2, \dots, k$.

BUKTI :

Menurut definisi probabilitas bersyarat :

$$P(B_r | A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)}$$

selanjutnya,

$$P(B_r | A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)}$$

sehingga diperoleh :

$$P(B_r | A) = \frac{P(B_r)P(A | B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A | B_i)}$$

CONTOH :

Kembali ke contoh sebelumnya, apabila seseorang merencanakan masuk menjadi anggota koperasi tersebut, tetapi menundanya beberapa minggu dan kemudian mengetahui bahwa iuran telah naik, berapakah probabilitas Pak Cokro terpilih menjadi ketua ?

Jawab :

Dengan menggunakan Kaidah Bayes, diperoleh bahwa :

$$P(B_3 | A) = \frac{P(B_3)P(A | B_3)}{P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) + P(B_3)P(A | B_3)}$$

Selanjutnya, masukkan probabilitas yang telah dihitung pada contoh sebelumnya, sehingga diperoleh :

$$P(B_3 | A) = \frac{0,08}{0,24 + 0,05 + 0,08} = \frac{8}{37}$$

Berdasarkan kenyataan bahwa iuran telah naik, maka hasil ini menunjukkan bahwa

kemungkinan besar bukan Pak Cokro yang sekarang menjadi ketua koperasi tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Agus, Irianto. (2009). *Statistik Konsep Dasar dan Aplikasinya*. Jakarta: Prenada Media Group.
- Carmen Díaz & Inmaculada de la Fuente. (2007). *Assessing Students' Difficulties With Conditional Probability And Bayesian Reasoning*. International Electronic Journal of Mathematics Education, 2, 128-148.
- Carmen Díaz & Carmen Batanero. (2009). *University students' Knowledge and Biases In Conditional Probability Reasoning*. International Electronic Journal of Mathematics Education, 4, 21-52.
- Ramachandran, K.M, Chris P. Tsokos. (2009). *Mathematical Statistics with Applications*. California: Elsevier Academic Press.
- Robert B. Ash. (2008). *Basic Probability Theory*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.
- Ronald E. Walpole, et.al (2007). *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*. Eighth Edition. Canada: Pearson Prentice Hall.